ТОМИНТЕХ

Элементы линейной алгебры и линейного программирования в экономике

Методическая разработка

Новикова Татьяна Валерьевна

2013

Целью данной разработки является приобщение студентов к грамотному и обоснованному решению проблем, возникающих в производственной деятельности с использованием математических методов анализа действительности. Методические указания состоят из введения, где указаны основные проблемы, стоящие в экономике нашей страны, заключения, где указана целевая аудитория и определены функции методической разработки в ходе учебного процесса, списка рекомендованной литературы, полно охватывающего все рассматриваемые разделы, и учебного материала, изложенного в виде семи тем, представляющим собой самостоятельный раздел. Присутствуют: изложение собственно изучаемого материала, вопросы для самопроверки и опроса на занятии. Предназначены для преподавателей и студентов как дневной, так и заочной формы обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Одной из центральных проблем, решаемых современной наукой, является проблема управления. Особенно остро стоит эта проблема в экономической науке, и тем более остро – в экономической науке нашей страны. Субъект управления выделяет ряд явлений в качестве экономических, определяя, таким образом, объект экономического управления. Объектом экономического управления является экономический процесс. Экономический процесс есть последовательность экономических явлений, в то время как, для субъекта экономического управления, он предстает как совокупность экономических задач. Управление есть процесс принятия решений. Таким образом, проблема управления есть проблема «обратной связи» - решения должны быть адекватны тому, относительно чего они принимаются. Решение экономической задачи предполагает наличие некоторого метода ее решения. Этот метод определяется применяемой в каждом конкретном случае экономической моделью. В случае экономического управления (управления в экономике) эта проблема может быть описана как проблема соответствия экономических моделей экономическому процессу.

Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Примерами экономических моделей являются: модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных, факторных и финансовых рынках и др. Строя модели, экономисты выявляют существенные факторы, определяющие исследуемое явление и отбрасывают детали, не существенные для решения поставленной проблемы. Формализация основных особенностей функционирования экономических объектов позволяет оценить возможные последствия воздействия на них и использовать такие оценки в управлении.

Существенным моментом экономической экспертизы является построение математической модели экономического объекта.

Математическая модель экономического объекта это его отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений, графиков. Отношения элементов изучаемого объекта отображаются (воспроизводятся) в аналогичных отношениях элементов модели. Таким образом, модель это условный образ объекта, построенный для упрощения его исследования. Предполагается, что изучение модели дает новые знания об объекте, либо позволяет определить наилучшие решения в той или иной ситуации.

Тема 1. Элементы математического моделирования в экономике

Современная экономическая теория, как на микро, так и на макроуровне, включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов. Во-вторых, из четко сформулированных исходных данных и соотношений методами дедукции (т.е. двигаясь от общего к частному) можно получать выводы об изучаемом объекте, которые будут в полной мере соответствовать сделанным предпосылкам. В-третьих, математические методы позволяют индуктивным путем (т.е. двигаясь от частного к общему) получать новые знания об объекте: оценивать форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующие имеющимся наблюдениям. В-четвертых, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и выводы.

Экономические модели позволяют выявить особенности функционирования экономического объекта и на основе этого предсказывать будущее поведение объекта при изменении каких-либо параметров. Предсказание будущих изменений, например, повышение обменного курса, ухудшение экономической конъюнктуры, падение прибыли может опираться лишь на интуицию. Однако при этом могут быть упущены, неправильно определены или неверно оценены важные взаимосвязи экономических показателей, влияющих на рассматриваемую ситуацию. В модели все взаимосвязи переменных могут быть оценены количественно, что позволяет получить более качественный и надежный прогноз.

Для любого экономического субъекта возможность прогнозирования ситуации означает, прежде всего, получение лучших результатов или избежание потерь, в том числе и в государственной политике.

СХЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

↓

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

↓

МЕТОД РЕШЕНИЯ

↓

ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ

↓

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА РЕЗУЛЬТАТА

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА – представляет собой некоторую экономическую модель данного экономического процесса;

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА – данной экономической модели ставится в соответствие некоторая математическая модель, т.е. данная экономическая модель интерпретируется в виде математической задачи;

МЕТОД РЕШЕНИЯ – выбор метода решения, исходя из анализа математической задачи;

ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ – точное и последовательное применение, выбранного метода решения;

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА РЕЗУЛЬТАТА – экономическая трактовка численного результата, полученного в результате решения математической задачи.

Вопросы к теме 1.

1. Что такое управление в экономике?
2. Каково происхождение экономических задач?
3. Что такое экономическая модель?

4. Что такое математическая модель?
5. Почему необходимо использование математики в экономике?
6. Какова роль моделей в экономической теории и принятии решений?
7. Опишите схему математического решения экономической задачи.

Тема 2. Векторы в экономике. Пространство товаров. Вектор цен

Напомним некоторые сведения из школьного курса геометрии. Если на плоскости ввести прямоугольную систему координат, то каждому вектору X (направленному отрезку) будет соответствовать пара чисел x_1, x_2 – координат этого вектора. Мы записываем это с помощью равенства $X = (x_1, x_2)$.

Аналогично в трехмерном пространстве $X= (x_1, x_2, x_3)$.

Обобщая факты, примем следующее определение, в котором n означает любое натуральное число.

Арифметическим n-мерным вектором называется любая последовательность из n действительных чисел x_1, x_2,…, x_n, которые называются компонентами вектора. Обозначается n –мерный вектор: $X = (x_1, x_2,\dots, x_n)$.

Число компонент вектора называется его размерностью. Например, вектор $P = (1, 3, 7, 5, 9)$ имеет размерность пять, т.к. у него пять компонент.

Векторы бывают двух видов – вектор-строки и вектор-столбцы. Выше были приведены вектор-строки. Вектор-столбец размерности n будет выглядеть следующим образом $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Иногда вектор удобно записывать так: $X = (x_i)$, $i = \overline{1, n}$, где x_i обозначает произвольную компоненту вектора X.

Два вектора называются равными, если они равны покомпонентно. Если $X = (x_1, x_2,\dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2,\dots, y_n)$, то $X =Y$, тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$. Как видно из определения равенства, лишь для векторов одинаковой размерности можно говорить о равенстве или неравенстве этих векторов. Для векторов разной размерности говорить об их равенстве бессмысленно.

Пусть X, Y – векторы одинаковой размерности, тогда $X \geq Y$, тогда и только тогда, когда $x_1 \geq y_1$, $x_2 \geq y_2$, …, $x_n \geq y_n$. Например, $X \geq Y$, если X= (6, 3,

0) и Y= (5, 1, 0). Но векторы X и Z = (5, 4, 0) несравнимы: ни одно из возможных соотношений $X \le Z$, $X = Z$, $X \ge Z$ не верно.

Суммой двух векторов X и Y одной размерности называется вектор $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

Векторы разной размерности складывать нельзя.

Свойства операции сложения векторов:

1. $X + Y = Y + X$.
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.

Вектор (0, 0, …, 0) называется нулевым и обозначается $\bar{0}$.

3. $X + \bar{0} = X$ для любого вектора X.

Вектор $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ называется противоположным вектору $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и обозначается $-X$.

4. $X + (-X) = \bar{0}$.
5. Произведением вектора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на число λ называется вектор $\lambda \cdot X = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$.

Свойства операции умножения вектора на число:

1. $\lambda \cdot (X + Y) = \lambda \cdot X + \lambda \cdot Y$.
2. $(\lambda + \mu) \cdot X = \lambda \cdot X + \mu \cdot X$..
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot X) = (\lambda \cdot \mu) \cdot X$.
4. $1 \cdot X = X, \quad 0 \cdot X = \bar{0}$.

Скалярным произведением двух векторов X и Y одной размерности называется число $X \cdot Y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$.

Векторы разной размерности скалярно перемножать нельзя.

Свойства операции скалярного умножения векторов:

1. $X \cdot Y = Y \cdot X$.
2. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$.
3. $X \cdot (\lambda \cdot Y) = \lambda \cdot (X \cdot Y)$.

Если при рассмотрении некоторого вопроса приходится иметь дело с несколькими векторами, то, как правило, их обозначают одной и той же буквой X с разными индексами: X_1, X_2, … Весь набор $\{X_1, X_2, \dots\}$ называют системой векторов.

Пусть даны векторы $X_1, X_2, \dots X_S$ из R^n. Любой вектор B вида $B = \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 + \dots + \lambda_S \cdot X_S$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_S$ - какие угодно числа, называется линейной комбинацией векторов X_1, X_2, … X_S. Также говорят, что вектор B линейно выражается через векторы X_1, X_2, … X_S или что B разлагается по векторам X_1, X_2, … X_S.

Система X_1, X_2, …, X_S n-мерных векторов называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_S$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots \lambda_S X_S = 0$; в противном случае данная система векторов называется линейно независимой, т. е. указанное равенство возможно лишь в случае, когда все $\lambda_i = 0$, ($i = \overline{1, S}$).

Базисом данной системы векторов называют такую подсистему, векторы которой линейно независимы, а любой другой вектор системы является их линейной комбинацией.

Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы, т. е. число векторов в базисе.

Множество всех n-мерных арифметических векторов, в котором введены указанные выше операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется арифметическим n-мерным линейным векторным пространством и обозначается R^n. Ранг пространства R^n равен n.

Заметим, что множество R^n несет определенную структуру. Именно любой вектор $X \in R^n$ можно умножить на любое число λ и результат – вектор λX есть снова элемент множества R^n. Сумма двух и даже любого конечного числа векторов из R^n снова есть элемент R^n. Кроме того, операции умножения вектора на число и сложения векторов обладают определенными свойствами.

Непосредственный геометрический смысл имеют лишь пространства R^1, R^2, R^3. Пространство R^n при $n > 3$ – чисто математический объект. Как мы увидим далее, этот объект очень удобен для описания реальных процессов, в том числе экономических.

Под товаром понимаются некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте. Будем считать, что имеется n различных товаров, количество i-го товара обозначается x_i, тогда некоторый набор товаров обозначается $X = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$, т.е. является n-мерным вектором. Будем рассматривать, как правило, только неотрицательные количества товаров, так, что для любого $i = \overline{1, n}$, $x_i \geq 0$ или $X \geq 0$. Множество всех наборов товаров называется пространством товаров. Это множество называется пространством потому, что в нем можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое неотрицательное число.

В дальнейшем предполагаем, что каждый товар имеет цену. Все цены предполагаются строго положительными. Пусть цена единицы i-го товара есть c_i, тогда вектор $C = (c_1, c_2,\ldots, c_n)$ есть вектор цен.

Вектор цен имеет ту же размерность, что и вектор набора товаров. Для набора товаров $X = (x_i)$ и вектора цен $C = (c_i)$ их скалярное произведение $C \cdot X = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$ есть число, называемое ценой набора товаров или его стоимостью.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть завод производит мужские, женские и детские велосипеды. Тогда объем его производства V за год можно записать как вектор $V = (M, L, K)$, где M – объем производства за год мужских велосипедов, L – женских, K – детских. Пусть объем производства в 1996 г. был $V_{96} = (1000, 800, 4000)$. Предположим, что объем производства в 1997 г. был на 10 % больше объема производства в 1996 г., тогда объем производства в 1997 г. есть вектор $V_{97} = 1.1\ V_{96}$ и $V_{97} = (1100, 880, 4400)$. Пусть торговая фирма «Велосипеды» половину всей продукции завода, тогда в 1996 г. фирма купила $W = 0/5\ V_{96}$, т.е. вектор закупки – $W = (500, 400, 2000)$. Предположим, что в стране всего три велосипедных завода, объемы производства которых в 1996 г. были $Q_1 =(1000, 800, 4000)$, $Q_2 = (1000, 600, 2000)$, $Q_3 = (2000, 1600, 8000)$. Тогда все три завода произвели вместе в 1996 г. $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (4000, 3000, 14000)$, т.е. 4000 мужских, 3000 женских и 14000 детских велосипедов.

В этом примере мы рассмотрели такие операции над векторами, как умножение вектора на число и сложение векторов.

Пример 2. Коммерческий банк, участвующий в строительстве многоэтажных автомобильных стоянок в центре Москвы, предпринял усилия по получению кредитов в трех коммерческих банках: «Мост-банке», «Мосбизнесбанке», «Столичном банке сбережений». Каждый из них предоставил кредиты в размерах соответственно 20, 40 и 40 млрд. руб. под годовую процентную ставку 40, 25 и 30%.

В данном примере речь идет о двух векторах: трехмерном векторе кредитов $K = (20, 40, 40)$ и векторе процентных ставок $P = (40, 25, 30)$. Для расчетов вместо вектора процентных ставок P удобнее использовать вектор коэффициентов $P_1 = (1.4, 1.25, 1.3)$.

Используя простой расчет, управляющий коммерческим банком может определить, сколь придется платить по истечении года за кредиты, взятые у банков: $K \cdot P_1 = 20 \cdot 1.4 + 40 \cdot 1.25 + 40 \cdot 1.3 = 130$ млрд. руб.

В этом примере мы рассмотрели применение операции скалярного произведения векторов.

Вопросы к теме 2.

1. Что понимается под арифметическим n-мерным вектором? Какие виды векторов бывают? Как записывается вектор?
2. Как сравнить два вектора?
3. Какие операции над векторами вам известны? Каковы свойства этих операций?
4. Как выразить один вектор в виде линейной комбинации других?
5. Какую систему векторов называют линейно зависимой (линейно независимой)?

6. Что понимают под базисом системы векторов?
7. Что понимают под рангом системы векторов?
8. Что такое пространство R^n?
9. Что понимают под товаром? Как изображается товар в векторном виде?
10. Что такое вектор цен?
11. Как определяется цена набора товаров?

Тема 3. Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Размерами матрицы называется пара чисел m, n, где m – число строк в матрице, а n – число столбцов. Обозначается матрица заглавной латинской буквой, например, матрица A. Записывается матрица в следующих скобках: (A), [A], $\|A\|$.

Так, $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&0&4\end{pmatrix}$- есть матрица A с двумя строками и тремя столбцами, т.е. m=2, n=3. Говорят, что A есть матрица размера 2×3.

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы и обозначаются теми же буквами, что и матрица, но строчными: $A = (a_{ij})$. a_{ij} – элемент матрицы A из i-той строки и из j-го столбца. В общем виде матрица выглядит следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1j}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2j}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{i1}&a_{i2}&\dots&a_{ij}&\dots&a_{in}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mj}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

В этой матрице выделены i-я строка и j-тый столбец.

Две матрицы называются матрицами одинакового типа (или одинакового порядка), если у них одинаковое число строк и столбцов.

Две матрицы одинакового типа $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ называются равными тогда и только тогда, когда они одинакового типа и $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall\, i,\ j$, т.е. если соответствующие элементы этих матриц равны. Таким образом, бессмысленно говорить о равенстве матриц при несовпадении их размеров.

Частные виды матриц.

1) Одно число можно рассматривать как матрицу размера 1×1, например A = [5].

2) Матрицу, состоящую из одной строки или одного столбца, называют соответственно вектор-строкой или вектор-столбцом. Например, матрица A – вектор-строка размера 1×3, а матрица B – вектор-столбец размера 3×1. $A = \| 1 \quad 2 \quad 3 \|$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3) Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей. Например, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - нулевая матрица размера 2×2.

4) Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу ее столбцов ($m = n$), в противном случае прямоугольной. Например, C – квадратная матрица размера 3×3 или квадратная матрица третьего порядка, D – прямоугольная матрица размера 2×3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 8 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Для квадратной матрицы вводится понятие главной и побочной диагоналей. В маатрице B элементы 1 0 7 образуют главную диагональ (для матрицы, записанной в общем виде, это будут элементы a_{ii}), элементы -2 0 8 образуют побочную диагональ.

5) Матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Например, F - диагональная матрица четвертого порядка.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

6) Диагональная матрица, все элементы которой равны единице, называется диагональной и обозначается буквой E. Например, E - единичная матрица третьего порядка.

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

7) Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие ниже (выше) главной диагонали равны нулю, называется верхней (нижней) треугольной матрицей. Например, G - верхняя треугольная матрица, H – нижняя треугольная матрица.

$$G=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&4&5\\0&0&-7\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}4&0&0\\-1&2&0\\7&-3&8\end{pmatrix}.$$

8) Прямоугольная матрица, содержащая треугольную подматрицу, называется трапецеидальной. Например, P, Q – трапецеидальные матрицы.

$$P=\begin{pmatrix}-1&8&4&3&1\\0&2&-5&2&4\\0&0&7&-9&6\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}4&-3&0&0\\1&8&2&0\\5&-7&3&1\end{pmatrix}.$$

9) Рангом матрицы называют максимальное число ее независимых вектор-строк. Ранг матрицы находят приведением ее к треугольному (трапецеидальному) виду с помощью элементарных преобразований, к которым относятся:

   1. перестановка любых строк матрицы;
   2. умножение на число $\lambda \neq 0$ любой строки матрицы;
   3. вычеркивание строки, состоящей сплошь из нулей;
   4. прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и тоже число, отличное от нуля.

Две матрицы называются эквивалентными, если одна из них получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований. Эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранги.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{bmatrix}1&3&1&2&1\\2&2&1&3&1\\3&1&4&-1&0\end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&1&2&1\\2&2&1&3&1\\3&1&4&-1&0\end{bmatrix}\sim$$

С помощью элементарных преобразований приводим матрицу к трапецеидальному виду.

1) Вычтем из элементов второй строки удвоенные элементы первой строки.

2) Вычтем из элементов третьей строки утроенные элементы первой строки.

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&-8&1&-7&-3\end{bmatrix}\sim$$

Вычтем из элементов третьей строки удвоенные элементы второй строки.

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&0&3&-5&-1\end{bmatrix}.$$

Последняя матрица имеет трапецеидальный вид и содержит три строки, поэтому ранг данной матрицы равен 3, т. е. $r(A) = 3$.

Действия с матрицами.

1) Транспонирование матриц.

Операция транспонирования состоит в перемене местами строк и столбцов матрицы с сохранением их номеров, т. е. 1-ая строка становится 1-ым столбцом, 2-ая строка становится 2-ым столбцом и т. д. Тоже самое можно сказать относительно столбцов, т. е. 1-ый столбец становится 1-ой строкой, 2-ой столбец становится 2-ой строкой и т. д. Обозначается транспонированная матрица: A^{T}. Например, A – исходная матрица размера

2×3, A^{T} - транспонированная матрица размера 3×2.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix},\quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix}.$$

Если транспонировать матрицу два раза, то получится исходная матрица. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

2) Сложение матриц.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового типа называется матрица C, того же типа, что A и B, с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$. Т. е., чтобы сложить две матрицы, нужно сложить соответствующие элементы обеих матриц.

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 5 & 11 & 8\end{pmatrix}.$$

Аналогично вводится разность матриц. $C = A - B$, $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения матриц.

1. $A + B = B + A$, т. е., матрицы можно складывать в любом порядке.
2. $A + O = O + A = A$.
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$, т. е. можно складывать любое конечное число матриц.

3) Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C того же типа, что и A с элементами $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}\ \forall\, i,\, j$. Обозначается произведение матрицы на число: $C = \lambda A$. Т. е., чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент этой матрицы умножить на это число.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 15 & 35 \end{pmatrix}$$

Свойства операции умножения матрицы на число.

1. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
2. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$.
3. $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$.
4. $1 \cdot A = A$, $-1 \cdot A = -A$, $O \cdot A = O$.

4) Произведение матриц.

Для того чтобы можно было перемножить две матрицы A и B число столбцов первой матрицы должно быть равно числу строк второй матрицы.

Если матрица $A = (a_{ij})$ имеет размерность $\underline{m} \times \boldsymbol{n}$, а матрица $B = (b_{ij})$ - $\boldsymbol{n} \times \underline{k}$, то произведением двух матриц A и B, взятых в определенном порядке, A - первая, B - вторая называется матрица C размера $\underline{m} \times \underline{k}$ с элементами $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$. Чтобы получить элемент c_{ij} нужно элементы i-той строки матрицы A умножить на элементы j-того столбца матрицы B и полученные произведения сложить. Обозначается произведение матриц: $C = A \cdot B$. Например, пусть даны матрицы A размера 2×3 и B размера 3×2, найдем произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции произведения матриц.

1. В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$, т. е. произведение матриц зависит от порядка сомножителей.

2. $A \cdot E = E \cdot A = A$, где E - единичная матрица.
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
4. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
5. $A \cdot (\mu \cdot B) = \mu \cdot (A \cdot B)$.

Определители.

Определителем n – го порядка называют число, обозначаемое $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и равное алгебраической сумме $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$) членов. Каждый член определителя равен произведению n элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца определителя. Знак члена равен $(-1)^t$, где t - число инверсий в перестановке вторых индексов элементов, если первые индексы записаны в натуральном порядке.

Определитель второго порядка определяется равенством $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Определитель третьего порядка определяется равенством $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n - 1)-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Например, минором M_{23} элемента $a_{23} = 4$ определителя

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ является определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Наиболее рациональный способ вычисления определителей – приведение к треугольному виду, так как определитель треугольного вида равен произведению диагональных элементов.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. В приведенном примере

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = -2 .$$

Укажем свойства определителей, которыми пользуются при решении примеров.

1. Величина определителя не изменится, если транспонировать определитель. Значит, все свойства определителя остаются справедливы и для столбцов.
2. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения.
3. Если какая-либо строка определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
4. При перестановке дух строк определитель меняет знак.
5. Определитель, имеющий две одинаковые строки, равен нулю.
6. Общий множитель элементов любой строки можно вынести за знак определителя.
7. Если в определителе две строки пропорциональны, то он равен нулю.
8. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и тоже число.
9. Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Обратная матрица.

Квадратная матрица A называется невырожденной (неособенной), если ранг ее равен порядку. Квадратная матрица B называется обратной для матрицы A, если $BA = AB = E$. Обратная матрица обозначается A^{-1}. Если матрица A невырожденная, то она имеет обратную матрицу A^{-1}, и притом только одну.

Обратная матрица находится по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Вычисляем определитель матрицы A, сводя его к треугольному виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -12 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 \cdot 7 \cdot (-\frac{5}{7})) = 5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$.

Вопросы к теме 3.

1. Что такое матрица?

2. Что такое размер матрицы?
3. Какие виды матриц бывают?
4. Что такое ранг матрицы?
5. Что называют элементарными преобразованиями матрицы?
6. Какие действия возможны над матрицами?
7. Как перемножить две матрицы?
8. Что такое определитель матрицы?
9. Как вычисляются определители второго и третьего порядков?
10. Что называют минором?
11. Что такое алгебраическое дополнение?
12. Какими свойствами определителя пользуются при вычислениях?
13. Что такое обратная матрица?
14. Как находится обратная матрица?

Тема 4. Матрицы в экономике. Задача оптимального планирования

Матрицы широко используются во всех областях науки, в том числе и в экономической науке. Многие обозначения при использовании матриц очень компактны, при этом не теряется ни наглядность, ни содержательность записи.

Рассмотрим так называемую технологическую матрицу. Пусть предприятие из m видов ресурсов производит видов n продукции. Предположим, что для производства одной единицы (ед.) j-го вида продукции расходуется a_{ij} ед. i–го вида ресурса, т. е. a_{ij} – норма расхода i-го ресурса на производство j-й продукции. Матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, составленная из норм расхода, называется матрицей норм расхода. Технологической же ее называют вот почему. Рассмотрим какой-нибудь, например j-й, столбец этой матрицы. Этот столбец полностью описывает расход ресурсов на производство 1 ед. j-й продукции. Говоря абстрактно, для получения 1 ед. j-й продукции надо «смешать» a_{1j} ед. 1-го ресурса, a_{2j} ед. 2-го ресурса и т. д. Такое «смешивание» вполне правильно назвать технологией переработки ресурсов. Таким образом, j-й столбец матрицы A описывает j-ю технологию переработки ресурсов. Всего предприятие располагает n технологиями.

Остановимся теперь на содержательном смысле строк матрицы норм расхода (или технологической). Элементы i-й строки описывают расход i-го ресурса на производство одной единицы каждой продукции.

Рассмотрим следующий план производства: произвести x_1 ед. 1-й продукции, x_2 ед. 2-й продукции и вообще x_j ед. j-й продукции. Такой план можно представить в виде вектор-столбца X размера $n\times 1$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Компонента x_j – это количество единиц j-й продукции, которую предприятие собирается произвести. Для осуществления такого плана понадобится $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$ ед. 1-го ресурса, $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j$ ед. 2-го ресурса и вообще $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ ед. i-го ресурса. Оказывается, что такие количества ресурса есть компоненты вектор-столбца $A \cdot X$ размера $m \times 1$, если выполнить умножение матрицы A норм расхода на вектор-столбец X плана производства.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + a_{1j}x_j & + & \dots & + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + a_{2j}x_j & + & \dots & + a_{2n}x_n \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + a_{ij}x_j & + & \dots & + a_{in}x_n \\ \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + a_{mj}x_j & + & \dots & + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Пусть b_i – это количество единиц i-го ресурса, запасенного на складе. Запишем эти величины запасов ресурсов в виде вектор столбца B размера $m \times 1$: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Тогда матрично-векторное неравенство $AX \le B$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1n}x_n \le & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2n}x_n \le & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{in}x_n \le & b_i \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mj}x_j & + & \dots & + & a_{mn}x_n \le & b_m \end{cases},$$

означает необходимость учитывать ограниченность запасов ресурсов при рассмотрении планов производства. Если это неравенство выполняется, значит, для плана X хватит имеющихся запасов ресурсов B и такой план является реальным, или, как говорят, допустимым.

Введем величину удельной прибыли c_j - это прибыль от реализации одной единицы j-й продукции. Запишем все эти удельные прибыли в виде вектор строки $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Тогда произведение $C \cdot X$ (скалярное произведение векторов одинаковой размерности или произведение матрицы C размера $1 \times n$ на матрицу X размера $n \times 1$) представляет собой величину прибыли, полученной при реализации X ед. произведенной продукции. Обозначим эту прибыль $P(X) = C \cdot X = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$.

Рассмотрим следующую <u>задачу оптимального планирования</u>: *найти такой план производства, который был бы допустимым и обеспечивал наибольшую прибыль из всех допустимых планов.*

Эту задачу (одну из важнейших задач во всей экономической теории) в матрично-векторном виде записывают так (ограничения $X \geq \bar{0}$ называются тривиальными, они следуют из содержательного смысла задачи и означают, что количество продукции не может быть отрицательным числом):

$$P(X) = C \cdot X \to \max,$$
$$AX \leq B, \tag{1}$$
$$X \geq \bar{0}.$$

Обозначим множество всех планов X, удовлетворяющих условиям: $AX \leq B$, $X \geq \bar{0}$, через Ω и назовем допустимым множеством (множеством допустимых планов), тогда задачу оптимального планирования можно сформулировать так: найти максимум функции прибыли $P(X)$ на множестве Ω допустимых планов:

$$P(X) = C \cdot X \to \max, \tag{2}$$
$$X \in \Omega.$$

Замечание: в терминах линейного программирования функцию прибыли $P(X)$ называют целевой функцией.

Рассмотрим пример.

Цех делает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида нужно 5 кг железа и 3 кг проволоки, второго вида – 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора цех получает прибыль 6 и 5 руб. соответственно. Цех располагает 4,8 т железа и 3 т проволоки. Сколько видов продукции производит цех? Сколько видов ресурсов используется? Составьте матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Рассмотрите несколько планов производства и определите, допустимы планы $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$?

Видов продукции – 2 (трансформаторы первого вида и трансформаторы второго вида), видов ресурсов – 2 (железо и проволока). Матрица норм расхода $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Вектор удельных прибылей $C = (6 \quad 5)$. Вектор запасов ресурсов $B = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}$. Чтобы определить, допустим ли план производства $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, надо либо непосредственноподсчитать расход ресурсов на этот план и сравнить с имеющимися запасами, или проверить выполнение матрично-векторного неравенства $AX \le B$. В итоге получаем, что оба плана допустимы.

Вопросы к теме 4.

1. Что такое матрица норм расхода?
2. Почему матрицу норм расхода еще называют технологической?
3. Что описывает *i*–я строка технологической матрицы?
4. Что описывает *j*–й столбец технологической матрицы?
5. Какой смысл имеют компоненты вектора плана производства?
6. Какой смысл имеют компоненты вектора удельных прибылей?
7. Что такое допустимый план?

8. Как звучит задача оптимального планирования?

9. Что такое тривиальные ограничения?

10. Как записывается задача оптимального планирования в матрично-векторном виде?

11. Что такое допустимое множество?

Тема 5. Экономические задачи, сводящиеся к системам линейных уравнений

Системы линейных уравнений.

Система из m линейных уравнений с n неизвестными или система уравнений $m \times n$ в общем виде записывается:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m}. \end{cases} \tag{3}$$

Решением этой системы называется любой набор значений неизвестных $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$, удовлетворяющий всем уравнениям системы.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Совместная система называется определенной, если она имеет только одно решение, и неопределенной, если она имеет больше одного решения.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей системы (3).

Матрица $A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется расширенной матрицей системы (3).

Для совместности системы (3) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы (3) равнялся рангу расширенной матрицы этой системы (теорема Кронекера - Капелли). Итак, система (3) совместна тогда и только тогда, если $r(A) = r(A_1) = r$. В этом случае число r называется рангом системы (3).

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных (т. е. $r = n$), то система будет определенной.

Если же ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система – неопределенная.

Метод Гаусса.

Метод Гаусса является наиболее распространенным точным методом решения и исследования систем линейных уравнений. Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному или трапецеидальному виду, из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

Практическое применение метода Гаусса состоит в следующем. Пусть в системе (3) коэффициент a_{11}. Если бы было $a_{11} = 0$, то на первое место в системе (3) мы поставили бы уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля. Пусть, далее, в i–том уравнении $a_{i1} \neq 0$. Умножим обе части первого уравнения на a_{i1}/ a_{11} и вычтем его из i–го уравнения.

$$(a_{i1} - a_{i1})\cdot x_1 + (a_{i2} - a_{12}\cdot a_{i1}/a_{11})\cdot x_2 + (a_{i3} - a_{13}\cdot a_{i1}/a_{11})\cdot x_3 + \ldots + (a_{in} - a_{1n}\cdot a_{i1}/a_{11})\cdot x_n = b_i - b_1\cdot a_{i1}/a_{11} \quad (4)$$

При преобразованиях неудобно иметь дело с дробями, поэтому умножим обе части равенства (4) на a_{11}. В результате в полученном уравнении

$$(a_{11}\cdot a_{i1} - a_{i1}\cdot a_{11})\cdot x_1 + (a_{11}\cdot a_{i2} - a_{12}\cdot a_{i1})\cdot x_2 + (a_{11}\cdot a_{i3} - a_{13}\cdot a_{i1})\cdot x_3 + \ldots + (a_{11}\cdot a_{in} - a_{1n}\cdot a_{i1})\cdot x_n = a_{11}\cdot b_i - b_1\cdot a_{i1} \quad (5)$$

коэффициент при x_1 равен нулю.

Преобразовав таким образом все уравнения системы, в которых $a_{i1} \neq 0$ ($i = \overline{2, n}$) получим систему

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}^{/}}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}^{/}x_n & = b_2^{/} \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & a_{m2}^{/}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}^{/}x_n & = b_m^{/}
\end{array}
\right. \qquad (6)
$$

в которой рамкой выделена так называемая остаточная часть системы.

Преобразование системы (3) в систему (6) выполнено с помощью первого уравнения, называемого разрешающим уравнением на данном шаге. При этом исключалась переменная x_1, называемая разрешающей переменной; коэффициент при ней называется разрешающим коэффициентом, столбец коэффициентов при разрешающей переменной – разрешающим столбцом.

Если в системе (6) встретится уравнение вида $0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_s^{/}$, где $b_s^{/} \neq 0$, то система (3) несовместна. Если этого не произойдет, то, предполагая, что $a_{22}^{/} \neq 0$, из всех уравнений остаточной части системы (6), исключим аналогично предыдущему неизвестную переменную x_2.

Продолжая процесс преобразования остаточных частей получающихся систем, приходим к одному из двух случаев:

1) либо в ходе преобразований получаем уравнение вида $0 \cdot x_k + 0 \cdot x_{k+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$, тогда система (3) несовместна;

2) либо приходим к системе без остаточной части

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}^{/}x_2 + a_{23}^{/}x_3 + \ldots + a_{2n}^{/}x_n = b_2^{/}, \\
\qquad\qquad a_{33}^{//}x_3 + \ldots + a_{3n}^{//}x_n = b_3^{//}, \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \tilde{a}_{rr}x_r + \ldots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r,
\end{array}
\right. \qquad (7)
$$

где $a_{11}, a_{22}^{/}, a_{33}^{//}, \ldots, \tilde{a}_{rr}$ отличны от нуля. Возможное уменьшение числа уравнений по сравнению с исходной системой ($r \leq m$) связано с тем, что в процессе преобразований вычеркиваются уравнения вида $0 \cdot x_i + 0 \cdot x_{i+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Процедуру преобразования системы (3) к виду (7) называют прямым ходом метода Гаусса.

Если в системе (7) $r = n$, то она имеет треугольный вид. Из последнего уравнения $\tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n$ находим x_n, из предпоследнего - x_{n-1} и т. д., и, наконец, из первого - x_1 и, тем самым, - единственное решение системы (3). Описанный процесс называют обратным ходом метода Гаусса.

Если же $r < n$, то в результате обратного хода r неизвестных можно выразить линейно через остальные n - r неизвестных. Эти r неизвестных будут базисными, а остальные n - r - свободными. В результате получим общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 + b_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + b_{1n}x_n, \\ x_2 = \tilde{b}_2 + b_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + b_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \tilde{b}_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + b_{rn}x_n. \end{cases} \tag{8}$$

Группу базисных неизвестных назовем базисом системы неизвестных. Общее решение (8) записано относительно базиса x_1, x_2,…, x_r. Общее решение можно записать и относительно других базисов, которых не может быть более C_n^r (число сочетаний из n по r равно $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

Чтобы получить какое-нибудь частное решение, достаточно придать свободным неизвестным некоторые числовые значения. При $r < n$ система (3) имеет бесконечное множество решений.

На практике элементарным преобразованиям подвергают не систему уравнений, а ее расширенную матрицу. Применительно к матричной записи вычислительная процедура гауссовых исключений формализуется посредством простых правил. Первый шаг (исключение неизвестной переменной x_1) прямого хода выполняется с разрешающим элементом a_{11}, второй шаг (исключение x_2) – с элементом $a_{22}^{/}$ и т. д. (разрешающими элементами являются диагональные элементы матриц). Пересчет же элементов матрицы выполняется по следующим правилам: 1) элементы разрешающей строки и всех выше расположенных строк остаются неизменными; 2)элементы разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, обращаются в нули; 3) все прочие элементы матрицы вычисляются по так называемому «правилу прямоугольника».

Рассмотрим 4 элемента матрицы *A*: a_{ij} (элемент, подлежащий преобразованию), a_{qp} (разрешающий элемент) и элементы a_{ip} и a_{qj}. Преобразованный элемент равен разности произведения разрешающего элемента на элемент, подлежащий преобразованию, и произведения элементов, находящихся в двух других противоположных углах прямоугольника $a_{ij}' = a_{qp} \cdot a_{ij} - a_{ip} \cdot a_{qj}$.

$$\begin{matrix} a_{qp} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{qj} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{ip} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} \end{matrix}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = \ \ 5, \\ -2x_1 \quad + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = \ 1. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Элемент $a_{11} = 1 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Выполняем шаг гауссова исключения: разрешающую строку переписываем без изменения, в разрешающем столбце ниже разрешающего элемента записываем нули, остальные элементы пересчитываем по правилу прямоугольника (все эти операции записаны в матрице подробно):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1\cdot 0-(-2)\cdot(-2) & 1\cdot 3-(-2)\cdot 1 & 1\cdot(-1)-(-2)\cdot 5 \\ 0 & 1\cdot 4-1\cdot(-2) & 1\cdot 3-1\cdot 1 & 1\cdot 1-1\cdot 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 0 & |\overline{\underline{-4}}| & 5 & | & 9 \\ 0 & 6 & 2 & | & -4 \end{bmatrix}\sim$$

Во втором шаге исключений разрешающим является элемент $a'_{22}=-4$. Первые две строки переписываем без изменения, под разрешающим элементом записываем нуль, остальные элементы находим по правилу прямоугольника:

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 0 & -4 & 5 & | & 9 \\ 0 & 0 & -4\cdot 2-6\cdot 5 & | & -4\cdot(-4)-6\cdot 9 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 5 \\ 0 & -4 & 5 & | & 9 \\ 0 & 0 & -38 & | & -38 \end{bmatrix}.$$

По последней матрице записываем систему уравнений, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+\ \ x_3= & 5, \\ \quad -4x_2+5x_3= & 9, \\ \qquad\quad -38x_3= & -38. \end{cases}$$

Решая ее, находим: $x_3=1,\quad -4x_2+5\cdot 1=9 \quad\Rightarrow\quad x_2=-1,$

$x_1-2(-1)+1=5 \quad\Rightarrow\quad x_1=2.$ Итак, (2; -1; 1) – единственное решение данной системы.

Пример 2. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3-\ x_4= 3, \\ 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-\ x_2+5x_3-6x_4= 1. \end{cases}$$

Последовательно получаем следующие матрицы:

$$\begin{bmatrix} |\overline{\underline{2}}| & -1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & | & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & | & 1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & |\overline{\underline{-8}}| & 10 & | & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -10 & | & 4 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 96 \end{bmatrix}.$$

Заключительной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 + \ x_3 - \ x_4 = \ 3, \\ \qquad -8x_3 + 10x_4 = -8, \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_4 = \ 96. \end{cases}$$

Последнее уравнение противоречиво. Система несовместна.

Пример 3. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + \ x_4 = \ 5, \\ \ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = \ 3, \\ \ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = \ 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Последовательно получаем следующие матрицы:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

Третья строка последней матрицы разделена на 3. Выполнив еще одно гауссово исключение, приходим к матрицам

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + \ x_4 = \ 5, \\ \qquad -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = \ 1. \end{cases}$$

Найдя x_2 из второго уравнения: $x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4$, и подставив это выражение в первое уравнение, получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 6 - 26x_3 + 17x_4, \\ x_2 = -1 + \ \ 7x_3 - \ 5x_4, \end{cases}$$

где x_3, x_4 - любые вещественные числа.

В рассмотренном примере обратный ход выполнен без использования матричной записи. При большом количестве уравнений и неизвестных в системе матричная запись заметно упрощает выкладки. Если при прямом ходе разрешающими выбирались последовательно диагональные элементы матрицы, то при обратном ходе таковыми будут элементы той же диагонали, но выбираемые в обратном порядке. Пересчет же элементов матрицы при обратном ходе выполняется по следующим правилам: 1) элементы разрешающей строки остаются неизменными; 2) элементы разрешающего столбца, расположенные выше разрешающего элемента, обращаются в нули; 3) все прочие элементы вычисляются по правилу прямоугольника.

Для примера 3 обратный ход реализуется матрицами:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & | & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 7 & -5 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -52 & 34 & | & -12 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & | & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 26 & -17 & | & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Из последней матрицы следует общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = \quad 6 - 26x_3 + 17x_4, \\ x_2 = -1 + \quad 7x_3 - \ 5x_4. \end{cases}$$

Метод полного исключения.

Для решения ряда задач линейной алгебры достаточно выполнения операций прямого хода. Что же касается решения систем линейных уравнений, то выше для этой цели выполнялись прямой, и обратный ходы, в результате чего в расширенной матрице выделялась диагональная подматрица и цель достигалась.

Диагональную подматрицу можно выделить в результате только прямого хода, если пользоваться приведенным ниже алгоритмом.

П е р в ы й шаг (соответствует исключению неизвестной переменной x_1) выполняется с разрешающим элементом $a_{11} \neq 0$ по правилам прямого хода.

О б щ и й шаг (соответствует последовательному исключению неизвестных переменных $x_2,\ x_3,\ \ldots$) выполняется по следующим правилам:

1) назначается разрешающий элемент; им будет коэффициент при исключаемой неизвестной;

2) элементы разрешающей строки остаются неизменными;

3) все элементы разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента) заменяются нулями и остаются таковыми до конца преобразований;

4) все прочие элементы матрицы пересчитываются по правилу прямоугольника.

Метод, реализуемый этим алгоритмом, назовем методом полного исключения.

Пример. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Воспользуемся алгоритмом метода полного исключения:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -5 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

По последней матрице записываем общее решение системы уравнений:
$x_1 = 1/6 + 5/6x_4$, $x_2 = 1/6 - 7/6x_4$, $x_3 = 1/6 + 5/6x_4$,

где x_4 - любое вещественное число.

Опорные решения системы линейных уравнений.

*При решении экономических задач важную роль играют базисные решения, в ко*торых базисные неизвестные принимают неотрицательные значения. Такие решения называются опорными. Чтобы получить опорное решение неопределенной системы уравнений, необходимо с самого начала гауссовых исключений выбирать разрешающие элементы по определенному правилу. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что все элементы b_i столбца свободных членов исходной расширенной матрицы системы неотрицательны, ибо если это не так, то обе части соответствующего уравнения следует умножить на –1.

Правило выбора разрешающего элемента:

> если в разрешающем столбце есть положительные и отрицательные элементы, то в качестве разрешающего элемента выбирается такой положительный элемент, для которого отношение свободного члена строки к этому элементу будет наименьшим из всех отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца.

Пример. Найти опорное решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Выделим в расширенной матрице системы единичную подматрицу, выбрав в ходе полных гауссовых исключений разрешающие элементы по установленным выше правилам. Для первого исключения примем за разрешающий, например, первый столбец. Разрешающую строку определим из условия min(9/2; 1/3; 5/1) = 1/3. Ею будет третья строка, а разрешающим – элемент 3. В результате придем к матрице с двумя пропорциональными строками, одну из которых отбросим:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ \boxed{3} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & -5 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 10 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & 7 & 14 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & 7 & 14 \end{array}\right] \sim$$

Если теперь в полученной матрице взять разрешающим второй столбец, то разрешающим в нем будет элемент 1, поскольку он является единственным положительным элементом этого столбца. Выполняя исключение, получаем

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 39 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 13 \end{array}\right] \sim$$

Преобразовав последнюю матрицу с третьим разрешающим столбцом (разрешающим в нем будет элемент 1), получим матрицу

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 5 & 18 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 13 \end{array}\right]$$

с единичной подматрицей. Этой матрице соответствует система трех уравнений с четырьмя неизвестными ($r = 3, \quad n = 4$). На основе последней матрицы при $x_4 = 0$ находим базисное решение (2; 18; 13; 0), которое является опорным.

Метод Крамера.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{n.} \end{cases} \qquad (9)$$

Если определитель Δ данной системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое формулой $x_i = \Delta_i / \Delta \quad (i = \overline{1, n})$, где Δ_i- определитель, полученный из Δ заменой *i*–го столбца столбцом свободных членов (теорема Крамера).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 + \quad x_3 = -2. \end{cases}$$

Устанавливаем, что $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 60,$ поэтому система имеет единственное решение. Вычисляем $\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & 3 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 120, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 60, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 180.$$

Отсюда, $x_1 = \Delta_1 / \Delta = 2, \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta = 1, \quad x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$ Таким образом, система имеет единственное решение (2; 1; 3).

Метод обратной матрицы.

Систему уравнений (9) можно представить в виде матричного уравнения $AX = B$, где A - матрица системы, X - вектор неизвестных, B - вектор свободных членов. Решение этого матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$. Для матрицы системы нужно найти обратную матрицу (если она существует), а для того чтобы найти вектор неизвестных, нужно умножить обратную матрицу на вектор свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 = 16. \end{cases}$$

Перепишем систему в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -6, \text{ значит } r(A) = 3.$$

Поскольку ранг совпадает с порядком матрицы, то матрица невырожденная. Найдем обратную матрицу.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13.$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $A^{-1} = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

откуда $X = -\dfrac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 + 128 \\ -18 + 14 + 16 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система имеет единственное решение (2; 3; -2).

Рассмотрим пример экономической задачи, сводящейся к системе линейных уравнений.

Пример. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа *А*, 300 заготовок типа *Б* и 675 заготовок типа *В*. При этом можно применять три способа раскроя. При первом способе раскроя получается 3 заготовки типа *А*, 1 заготовка типа *Б* и 4 заготовки типа *В*, при втором способе раскроя получается 2 заготовки типа *А*, 6 заготовок типа *Б* и 1 заготовка типа *В*, при третьем способе раскроя получается 1 заготовка типа *А*, 2 заготовки типа *Б* и 5 заготовок типа *В*. Записать в математической форме условия выполнения задания.

Обозначим через x_1, x_2, x_3 количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x_1 листов будет получено $3x_1$ заготовок типа *А*, при втором - $2x_2$, при третьем - $1x_3$. Для полного выполнения задания по заготовкам типа *А* сумма $3x_1 + 2x_2 + x_3$ должна равняться 360, т. е.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 360. \qquad (10)$$

Аналогично получаем уравнения

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 300, \qquad (11)$$

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 = 675, \qquad (12)$$

которым должны удовлетворять неизвестные x_1, x_2, x_3 для того, чтобы выполнить задание по заготовкам *Б* и *В*.

Система уравнений (10) - (12) и выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам *А*, *Б* и *В*.

Решать систему уравнений (10) - (12) можно приведенными выше методами. Выбор подходящего метода осуществляется в каждом конкретном случае исходя из преследуемых целей.

Матрица системы (10) - (12) – квадратная, если ее определитель не равен нулю, то данную систему можно решить, например, методом Крамера.

Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 67,$$ поэтому система имеет единственное решение.

Вычисляем Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 360 & 2 & 1 \\ 300 & 6 & 2 \\ 675 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6030, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 360 & 1 \\ 1 & 300 & 2 \\ 4 & 675 & 5 \end{vmatrix} = 1005, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 360 \\ 1 & 6 & 300 \\ 4 & 1 & 675 \end{vmatrix} = 4020.$$

Отсюда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6030}{67} = 90, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1005}{67} = 15, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4020}{67} = 60.$

Таким образом, при выполнии задания по заготовкам будет использовано 90 листов материала при первом способе раскроя, 15 листов материала при втором способе раскроя и 60 листов материала при третьем способе раскроя.

Вопросы к теме 5.

1. Как записывается система из m линейных уравнений с n неизвестными?
2. Что называют решением системы уравнений?
3. Как записываются матрица системы и расширенная матрица системы?
4. Какую систему уравнений называют совместной (несовместной)?
5. Каковы условия совместности системы уравнений?
6. Какую систему уравнений называют определенной (неопределенной)?
7. Каковы условия определенности (неопределенности) системы уравнений?
8. В чем суть метода Гаусса?
9. Опишите алгоритм метода Гаусса.
10. Что такое общее (частное) решение?
11. В чем состоит метод полного исключения?
12. Сколько возможно различных вариантов решения системы линейных уравнений?
13. Что такое опорное решение системы линейных уравнений?
14. Как найти опорное решение системы линейных уравнений?

15. В чем заключается метод Крамера?
16. В чем заключается метод обратной матрицы?

Тема 6. Экономические задачи, сводящиеся к системам линейных неравенств

Два числа или два алгебраических выражения, соединенных между собой знаком > или <, ≥ или ≤, образуют неравенство.

Линейное неравенство относительно переменных x_1, x_2,…, x_n, можно записать в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b. \quad (13)$$

Решением неравенства (13) называется множество значений переменных x_1, x_2,…, x_n, при которых данное неравенство становится верным числовым неравенством.

Системой из m линейных неравенств с n переменными называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (14)$$

Решением системы (14) называется множество значений переменных x_1, x_2,…, x_n, при которых каждое неравенство становится верным числовым неравенством.

Пример. Механический цех может изготовить за смену либо 600 деталей *А*, либо 1200 деталей *Б*, либо любую их комбинацию в пределах своей мощности. Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на закалку, позволяет обработать за смену либо 1400 деталей *А*, либо 800 деталей *Б*, либо любую допустимую их комбинацию. Детали *А* поступают затем в третий цех, пропускная способность которого не более 400 деталей. Записать в математической форме условия, которые необходимо учитывать при составлении плана выпуска деталей *А* и *Б*.

Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количества деталей *А* и *Б*, планируемых к выпуску за смену. Анализируя возможности механического цеха, мощность которого примем за единицу, необходимо учесть, что при одновременном выпуске и тех, и других деталей должно выполняться условие пропорциональности количества деталей данного вида доле производственной мощности цеха, занятой ее выпуском. Так, что на изготовление одной детали *А* будет приходиться 1/600 всей мощности цеха, а одной детали *Б* – 1/1200 всей мощности. Для реализации плана (x_1, x_2) потребуется занять $1/600x_1 + 1/1200x_2$ всей мощности цеха, что, естественно, не может быть более, чем вся наличная производственная мощность цеха, принятая за единицу. Это условие можно записать так: $1/600x_1 + 1/1200x_2 \le 1$.

Аналогичное условие необходимо соблюсти и для термического цеха: $1/1400x_1 + 1/800x_2 \le 1$.

Ограничения по пропускной способности третьего цеха запишется в виде $x_1 \le 400$.

Из практических соображений ясно, что x_1 и x_2 выражаются неотрицательными числами, т. е. $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$.

Таким образом, множество допустимых планов описывается следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} 1/600x_1 + 1/1200x_2 \le 1, \\ 1/1400x_1 + 1/800x_2 \le 1, \\ x_1 \le 400, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Говоря иначе, именно условия (15) необходимо учитывать при составлении любого реального (в том числе и оптимального) плана выпуска деталей *А* и *Б* в рассматриваемом производстве.

Вопросы к теме 6.

1. Что понимают под линейным неравенством?
2. Что называют решением линейного неравенства?
3. Как записывается система из *m* линейных неравенств с *n* переменными?
4. Что называют решением системы линейных неравенств?

Тема 7. Примеры задач оптимизации

Задача об использовании ресурсов

Предприятие имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные ресурсы, площади и т.п. Допустим, например, ресурсы трех видов R_1, R_2, R_3 имеются в количестве соответственно b_1, b_2, b_3 условных единиц. Предприятие выпускает два вида товаров T_1, T_2. Причем известно, сколько единиц каждого ресурса требуется для производства единицы каждого товара.

Рассмотрим простую математическую модель этой задачи.

Пусть a_{ij} – число единиц ресурса R_i (i = 1, 2, 3), необходимое для производства единицы товара Tj (j = 1, 2, 3). Доход, получаемый предприятием от единицы каждого вида товаров, соответственно равен c_1, c_2. Требуется при данных ресурсах выпустить такую комбинацию товаров, при которой доход предприятия оказался бы максимальным.

Запишем все данные в виде таблицы

	T_1	T_2	
R_1	a_{11}	a_{12}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	b_2
R_3	a_{31}	a_{32}	b_3

Обозначим через x_1, x_2 соответственно количество товаров T_1, T_2. Очевидно, доход предприятия есть целевая функция $f = c_1x_1 + c_2x_2$.

Общее количество ресурса R_1, используемого при выпуске обоих товаров равно $a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2$. Оно не должно превосходить запаса b_1, т. е. $a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 \le b_1$.

Вообще количество ресурса R_i (i = 1, 2, 3), используемого при выпуске обоих товаров равное $a_{i1}x_1 + a_{i2}\,x_2$. Оно не должно превосходить запаса b_i, т. е. должны выполняться неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}\,x_2 \le b_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Математическая задача об использовании ресурсов состоит в определении значений неизвестных x_1, x_2, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

и максимизирующих целевую функцию $f = c_1x_1 + c_2x_2$.

Задача о диете

Из имеющихся в нашем распоряжении продуктов требуется составить такую диету, которая, с одной стороны, удовлетворяла бы минимальные потребности организма в питательных веществах (белках, жирах, углеводах, минеральных солях, витаминах и т. п.), с другой стороны – требовала бы наименьших затрат.

Пусть имеются два вида продуктов: $П_1$ и $П_2$, содержащих питательные вещества A, B, C. В 1 кг продуктов $П_1$ и $П_2$ содержится определенное количество питательных веществ того или иного вида. Эти сведения представлены в следующей таблице.

	В 1 кг $П_1$	В 1 кг $П_2$	Ежесуточные потребности организма
A	a_1	a_2	a
B	$в_1$	$в_2$	b
C	c_1	c_2	c
Стоимость	s_1	s_2	

В таблице также указаны известные нам данные: a, b, c – ежесуточные потребности организма в питательных веществах A, B, C и s_1, s_2 – стоимость 1кг продуктов $П_1$ и $П_2$. Требуется рассчитать количество x_1 продукта $П_1$ и количество x_2 продукта $П_2$ так, чтобы обеспечить необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на продукты. Очевидно, общая стоимость продуктов будет целевая функция $f = s_1x_1 + c_2x_2$. Общее количество питательного вещества A в обоих видах продуктов равно $a_1x_1 + a_2 x_2$. Оно не должно быть меньше a: $a_1x_1 + a_2 x_2 \leq a$.

Аналогичные неравенства должны выполняться для B и C. Таким образом, перед нами задача линейного программирования.

Дана система

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_1x_2 \leq a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 \leq b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 \leq c, \end{cases} \tag{16}$$

трех линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 и линейная функция $f = s_1x_1 + c_2x_2$.

Среди решений системы (16), удовлетворяющих дополнительно условиям неотрицательности:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \tag{17}$$

требуется найти такое, при котором целевая функция f достигает наименьшего значения (минимизируется):

$$f \to \min \text{ при условиях (16), (17).}$$

Заметим, что к подобной схеме могут быть сведены различные задачи, например задачи определения состава сплавов, смесей горючего, кормовых смесей, смесей минеральных удобрений и т. п.

Транспортная задача

Уголь, добываемый в нескольких месторождениях, отправляется потребителям: заводам, электростанциям и т. п. Известно, сколько угля добывается в каждом месторождении, скажем, за месяц и сколько его требуется на тот же срок любому из потребителей; расстояния между месторождениями и потребителями, а также условия сообщения между ними. Учитывая эти данные, можно подсчитать, во что обходится перевозка каждой тонны угля из любого месторождения в любой пункт потребления. Требуется при этих условиях спланировать перевозки угля таким образом, чтобы затраты были минимальными.

Имеются два месторождения M_1, M_2 и три потребителя $П_1$, $П_2$, $П_3$. Количество угля в M_1 и M_2 соответственно a_1 и a_2. Запросы потребителей $П_1$, $П_2$, $П_3$ пусть будут b_1, b_2, b_3. Считаем, что суммарные запасы равны суммарным потребностям: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$ (такое предположение вполне естественно). Наконец, заданы числа c_{ij} (i = 1,2; j = 1, 2, 3), представляющие собой стоимость перевозки тонны угля из M_i в $П_j$. Необходимо определить шесть чисел x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, где x_{ij} – количество угля, предназначенное к отправке из M_i в $П_j$.

Составим следующую таблицу:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Всего отправлено
M_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
M_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Всего доставлено	b_1	b_2	b_3	

Общее количество угля, вывезенное из M_1, должно равняться a_1. Отсюда получаем условие

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1.$$

Аналогичное условие должно выполняться для M_2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.$$

Общее количество угля, доставленное в $П_1$, должно равняться b_1. Отсюда:

$$x_{11} + x_{21} = b_1.$$

Аналогично получаем условия:

$$x_{12} + x_{22} = b_2,\ x_{13} + x_{23} = b_3.$$

Предполагаем, что затраты на перевозку прямо пропорциональны количеству перевозимого угля, т. е. перевозка из M_i в $П_j$ стоит $c_{ij}x_{ij}$. Тогда общие затраты по всем перевозкам будут иметь вид следующей целевой функции:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{12} + c_{23}x_{23}.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче. Дана система

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \\ x_{11} + x_{21} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} = b_2, \\ x_{13} + x_{23} = b_3. \end{cases} \tag{18}$$

пяти линейных уравнений с шестью неизвестными и линейная функция z. Требуется среди неотрицательных решений x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} системы (18) выбрать такое, при котором целевая функция z достигает наименьшего значения (минимизируется).

Поставленная задача может быть, конечно, сформулирована и в более общем виде, т. е. с любым числом поставщиков (месторождений) и потребителей. Она получила название *транспортной задачи* и явилась одной из первых проблем, для решения которых были с успехом применены методы линейного программирования.

Вопросы к теме 7.

1. Какие типы задач линейного программирования существуют?
2. В задачах какого типа целевая функция максимизируется?
3. В задачах какого типа целевая функция минимизируется?
4. Какое дополнительное ограничение накладывается на запасы и потребности в транспортной задаче?

Заключение

Предлагаемые методические указания «Элементы линейной алгебры и линейного программирования в экономике» предназначены для преподавателей и студентов дневной и заочной формы обучения. Методические указания могут использоваться при изучении математических и экономических дисциплин, а также информатики.

Указания содержат список литературы, необходимый теоретический минимум, рекомендации по решению задач, вопросы для самопроверки.

Данные методические указания помогут преподавателю организовать самостоятельную работу студентов на занятиях, студентам – усвоить теоретический материал и овладеть необходимыми практическими навыками.

Список рекомендуемой литературы.

1. Малыхин В.И. Математика в экономике: Учебное пособие.- М.: ИНФРА-М, 1999. - 356 с.

2. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: ч. 1- М.: Финансы и статистика, 2000.

3. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для ВТУЗов: В 2-х ч.: Изд-во «Высшая школа», 2000.

4. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учеб. Пособие/ А.В.Кузнецов, Д.С.Кузнецова, Е.И.Шилкина и др.- Мн.: Высш. шк., 2001.- 284 с.